# Ueber eine allgemeine Classe

von

# ein-zweideutigen Raumtransformationen.

---

## Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

der

hohen philosophischen Facultät der Universität Erlangen

vorgelegt

von

**Bartholomäus Wimmer.**

Dresden,
Druck von B. G. Teubner.
1891.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41535708_0226

# Vorbemerkung.

Die vorliegende Arbeit behandelt eine allgemeine Classe von ein-zweideutigen Transformationen im Raume. Von zwei Seiten her wurde der Theorie der ein-zweideutigen Raumtransformationen vorgearbeitet. Erstens durch die Untersuchung der ein-eindeutigen Raumtransformationen, die wir hauptsächlich den Herren Nöther, Cremona und Cayley verdanken; zweitens durch die Abbildung einer Doppelebene auf eine einfache Ebene, also eine ein-zweideutige Ebenentransformation, von welcher Clebsch zuerst einige Fälle ausführte, und von welcher Herr Professor Nöther alle möglichen Fälle aufstellte.

Ein-zweideutige Raumtransformationen sind bis jetzt nur einige wenige betrachtet worden; so untersuchte Aschieri (Rendiconti del r. Istituto lombardo, Serie II Bd. XIV und XV) diejenige ein-zweideutige Raumtransformation, bei welcher den Ebenen eines Raumes im andern Raume Flächen zweiter Ordnung mit einem festen Kegelschnitte und zwei variablen Schnittpunkten entsprechen, und Reye (Geometrie der Lage, II. Theil) diejenige, bei welcher den Ebenen des einen (Doppel-) Raumes im andern Raume Flächen zweiter Ordnung mit sechs festen und zwei variablen Schnittpunkten entsprechen. Die in dieser letzteren Transformation enthaltene ein-eindeutige involutorische Raumtransformation wurde in einer Inauguraldissertation der Universität Breslau („Ueber eine räumliche involutorische Verwandtschaft siebenten Grades und ihre Kernfläche IV. Ordnung, von Viktor Eberhard", Breslau 1885) und früher bereits von Geiser (Crelle's Journal Bd. 69) nach den verschiedensten Richtungen untersucht.

Allerdings hat nun Riccardo de Paolis in mehreren Abhandlungen (Accademia dei Lincei 1877 und 1885) die allgemeinen Beziehungen, die bei den ein-zweideutigen Ebenen- und auch Raumtransformationen stattfinden müssen, klargelegt; doch hat derselbe keine eigentliche Transformation angegeben.

Auf Anregung des Herrn Professor Nöther beschäftigte ich mich daher mit einer bestimmten ein-zweideutigen Raumtransformation, welche bisher nicht aufgestellt war und welche durch Specialisirung eine ganze Classe von ein-zweideutigen Raumtransformationen giebt, die bedeutend

allgemeiner als die bisher betrachteten sind. Doch habe ich hier zunächst nur den allgemeinsten Fall behandelt und behalte ich mir die Bearbeitung der speciellen Transformationen vor.

Die Methode, die ich hierbei anwendete, ist algebraisch-geometrisch und lehnt sich die vorliegende Arbeit an die von Herrn Professor Nöther über ein-eindeutige Raumtransformationen, vermittelt durch drei bilineare Gleichungen, veröffentlichte Abhandlung an (Mathem. Annalen Bd. 3).

Der Inhalt der vorliegenden Arbeit ist kurz folgender.

Nachdem im § 1 einige allgemeine Beziehungen der ein-zweideutigen Transformationen erörtert sind, giebt § 2 die Definition der zu untersuchenden Transformation durch drei Gleichungen. § 3 behandelt sodann diejenigen Flächen (vierter Ordnung mit fester Curve elfter Ordnung), welche den Ebenen des doppelten Raumes entsprechen, und ausserdem die den Geraden des doppelten Raumes entsprechenden Curven (fünfter Ordnung vom Geschlechte 2).

In § 4 wird die Gleichung derjenigen Flächen (fünfter Ordnung mit beweglicher Doppelcurve dritter Ordnung) aufgestellt, welche den Ebenen des einfachen Raumes entsprechen, während § 5 die Gleichung der sogen. Uebergangsfläche $\Omega$ enthält. Die Curven (vierter Ordnung zweiter Species), welche den Geraden des einfachen Raumes entsprechen, werden in § 6 untersucht.

Der § 7 behandelt ferner die im einfachen Raume befindliche Doppelfläche (zwölfter Ordnung mit dreifacher Curve elfter Ordnung).

In § 8 musste ein Theil der Betrachtungen über die involutorische Transformation im einfachen Raume vorgenommen werden, um in § 9 die weiteren Hauptelemente — ein Theil war bereits in § 4 festgelegt worden — des Doppelraumes bestimmen zu können.

§ 10 wendet sich wieder zur involutorischen Transformation, speciell zu den Hauptelementen derselben, welche aus einer Curve elfter Ordnung, vier Kegelschnitten und 35 Geraden bestehen. Die involutorische Verwandtschaft wird als von der 19. Ordnung gefunden.

Schliesslich blieb noch der durch die involutorische Verwandtschaft im einfachen Raume bestimmte Strahlencomplex zu untersuchen übrig. Derselbe ist kein anderer, als der Reye'sche Tetraedercomplex (zweiten Grades).

Für die vielfachen Anregungen und Unterstützungen, die mir bei der Ausführung meines Themas von Herrn Professor Dr. M. Nöther zu Theil wurden, erlaube ich mir an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

Nach Fertigstellung dieser Arbeit kam mir eine Abhandlung des Herrn Montesano, „Su la trasformazione involutoria dello spezio che determina un complesso tetraedrale“ (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei 1889) zu Gesicht, welche vom Tetraedercomplex ausgehend die auch in dieser

Arbeit behandelte involutorische Transformation auf synthetisch-geometrischem Wege entwickelt, ohne übrigens auf die zugehörige ein-zweideutige Transformation einzugehen.

---

## § 1.
## Allgemeines.

Ehe ich in die Behandlung meines eigentlichen Themas eintrete, möchte ich kurz einige allgemeine Bemerkungen vorausschicken.

Denken wir uns nämlich irgend eine ein-zweideutige Transformation zwischen einem Raume, dessen Punktcoordinaten $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, und einem Raume, dessen Punktcoordinaten $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$ seien, so entsprechen jedem Punkte des einen (etwa $y$-) Raumes im Allgemeinen zwei Punkte des andern (etwa $x$-) Raumes, jedem Punkte des $x$-Raumes aber im Allgemeinen nur ein Punkt des $y$-Raumes.

Den $y$-Raum nennt man gewöhnlich den doppelt überdeckten und den $x$-Raum den einfach überdeckten Raum.

Nun entsteht zunächst die Frage, für welche Punkte $y$ die zwei entsprechenden Punkte $x$ zusammenfallen.

Man findet, dass diese Punkte $y$ eine Fläche erfüllen, welche als „Uebergangsfläche“ bezeichnet wird. Sie stellt gleichsam die Contur des auf den Doppelraum abgebildeten einfachen Raumes dar. Die diesen Punkten $y$ entsprechenden Punkte $x$ erfüllen eine Fläche, welche der Uebergangsfläche eindeutig entspricht und als „Doppelfläche“ bezeichnet wird.

Die Punktepaare des $x$-Raumes, die den Punkten des $y$-Raumes entsprechen, bestimmen im $x$-Raume selbst wieder eine ein-eindeutige und zwar involutorische Transformation.

Im Vorstehenden sind diejenigen hauptsächlichsten Besonderheiten angegeben, welche die ein-zweideutigen Transformationen von den ein-eindeutigen Transformationen im Wesentlichen unterscheiden.

Eingehend erörtert sind diese allgemeinen Beziehungen bei Riccardo de Paolis l. c.

## § 2.
## Bestimmung einer allgemeinen Classe von ein-zweideutigen Transformationen durch drei Gleichungen.

Wir wollen im Nachfolgenden diejenige ein-zweideutige Transformation zwischen zwei Räumen betrachten, die bestimmt ist durch die folgenden drei Gleichungen zwischen den Coordinaten der beiden Räume:

$$\text{I)} \qquad \left.\begin{aligned} \Sigma \mathsf{A}_i y_i &= 0 \\ \Sigma \mathsf{B}_i y_i &= 0 \\ \Sigma \Gamma_i y_i &= 0 \end{aligned}\right\}, \qquad i = 1, 2, 3, 4.$$

wobei die $\mathsf{A}_i$ und $\mathsf{B}_i$ lineare und die $\Gamma_i$ quadratische Functionen der Coordinaten $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ sind.

Durch diese drei Gleichungen ist im Allgemeinen jedem Punkte $x$ — bestimmte Hauptelemente ausgenommen — ein und nur ein Punkt $y$ zugeordnet, während jedem Punkte $y$ durch Vermittelung eben dieser drei Gleichungen im Allgemeinen zwei Punkte $x$ entsprechen.

Die obigen drei Gleichungen lassen sich auch noch in folgender Form schreiben:

$$\text{II)} \qquad \left.\begin{aligned} \Sigma A_i x_i &= 0 \\ \Sigma B_i x_i &= 0 \\ \Sigma C_{ik} x_i x_k &= 0 \end{aligned}\right\}, \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

wobei die $A_i$, $B_i$ und $C_{ik}$ lineare Functionen der $y_i$ sind. Wie die Coefficienten der $y_i$ in den $A_i$, $B_i$ und $C_{ik}$ mit den entsprechenden in $\mathsf{A}_i$, $\mathsf{B}_i$ und $\Gamma_i$ zusammenhängen, ist leicht zu übersehen.

Aus den drei Gleichungen I) ergeben sich sofort die Werthe der $y$, ausgedrückt durch die $x$.

Es ist nämlich

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = \begin{Vmatrix} \mathsf{A}_1 & \mathsf{A}_2 & \mathsf{A}_3 & \mathsf{A}_4 \\ \mathsf{B}_1 & \mathsf{B}_2 & \mathsf{B}_3 & \mathsf{B}_4 \\ \Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma_3 & \Gamma_4 \end{Vmatrix}.$$

Durch Specialisirung der Coefficienten in den drei Gleichungen erhält man eine bedeutende Anzahl von verschiedenen ein-zweideutigen Transformationen. Wir wollen jedoch hier nur den allgemeinen Fall betrachten.

## § 3.

### Ueber die den Ebenen des $y$- (Doppel-) Raumes entsprechenden Flächen vierter Ordnung im einfachen ($x$-) Raume.

Um diejenigen Flächen des $x$-Raumes zu finden, welche den Ebenen des $y$-Raumes entsprechen, nimmt zu den drei Gleichungen I) noch die Gleichung einer Ebene des $y$-Raumes

$$\Sigma u_i y_i = 0$$

und eliminirt aus diesen vier Gleichungen die $y$. Man erhält sodann als Gleichung der entsprechenden Fläche die gleich 0 gesetzte Determinante:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ \mathsf{A}_1 & \mathsf{A}_2 & \mathsf{A}_3 & \mathsf{A}_4 \\ \mathsf{B}_1 & \mathsf{B}_2 & \mathsf{B}_3 & \mathsf{B}_4 \\ \Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma_3 & \Gamma_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Dieselbe ist in den $x$ vom vierten Grade, also die durch sie dargestellte Fläche von der vierten Ordnung.

Den sämmtlichen Ebenen des $y$-Raumes entsprechen die sämmtlichen Flächen vierter Ordnung, die man erhält, wenn man den $u$ alle möglichen Werthe beilegt.

Da je drei dieser Flächen nur zwei veränderliche Punkte gemein haben dürfen, so ist klar, dass 62 Schnittpunkte oder deren Aequivalente fest sein müssen für alle Flächen dieses Systems.

Um diese gemeinsamen Elemente zu finden, benützt man dieselbe Methode, die Herr Professor Nöther bei den ein-eindeutigen Transformationen angewendet hat. (S. Mathem. Annalen, Bd. 3 S. 553.)

Bezeichnen wir nämlich in der obigen Gleichung der Fläche vierter Ordnung die Unterdeterminanten der $u_i$ mit $\varphi_i$, so ist durch

$$\Sigma u_i \varphi_i = 0$$

eine beliebige Fläche des Systems dargestellt. Hierzu gehören auch $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$, $\varphi_4 = 0$. Diejenigen Elemente, welche diese vier Flächen gemeinsam haben, müssen nun in jeder Fläche des Systems enthalten sein.

Es ist aber

$$\begin{aligned} A_1\varphi_1 + A_2\varphi_2 + A_3\varphi_3 + A_4\varphi_4 &\equiv 0, \\ B_1\varphi_1 + B_2\varphi_2 + B_3\varphi_3 + B_4\varphi_4 &\equiv 0, \\ \Gamma_1\varphi_1 + \Gamma_2\varphi_2 + \Gamma_3\varphi_3 + \Gamma_4\varphi_4 &\equiv 0. \end{aligned}$$

Für den Schnitt von $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_2 = 0$ ist also

$$\begin{aligned} A_3\varphi_3 + A_4\varphi_4 &= 0, \\ B_3\varphi_3 + B_4\varphi_4 &= 0 \\ \text{und} \qquad \Gamma_3\varphi_3 + \Gamma_4\varphi_4 &= 0. \end{aligned}$$

Für die Coordinaten dieses Schnittes ist also entweder auch $\varphi_3 = 0$ und $\varphi_4 = 0$, d. h. auch $\varphi_3 = \varphi_4 = 0$ muss durch diesen Theil des Schnittes von $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ hindurchgehen, oder es ist

$$A_3 - \lambda A_4 = 0, \quad B_3 - \lambda B_4 = 0, \quad \Gamma_3 - \lambda \Gamma_4 = 0.$$

Diese drei Gleichungen stellen aber drei projectivische Flächenbüschel von der ersten, resp. ersten und zweiten Ordnung dar und erzeugen eine Curve fünfter Ordnung als Schnitt einer Fläche zweiter Ordnung $\begin{vmatrix} A_3 & A_4 \\ B_3 & B_4 \end{vmatrix} = 0$ und einer Fläche dritter Ordnung $\begin{vmatrix} A_3 & A_4 \\ \Gamma_3 & \Gamma_4 \end{vmatrix} = 0$, welche eine Gerade $A_3 = A_4 = 0$ gemeinsam haben.

Diese Curve fünfter Ordnung stellt den beweglichen Theil des Schnittes von $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ dar; für den übrigen Theil des Schnittes, welcher eine Curve elfter Ordnung ist, muss auch $\varphi_3 = \varphi_4 = 0$ sein. Diese Curve elfter Ordnung ist also fest für alle Flächen des Systems $\Sigma u_i \varphi_i = 0$.

Das Geschlecht der Curve fünfter Ordnung ist $= 2$, denn die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte ist $= 4$.

Die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte der Curve elfter Ordnung ist $= 31$, also ihr Geschlecht $= 14$.

Diese Resultate ergeben sich durch Anwendung der Formel des Artikels 108 in Salmon's Raumgeometrie, II. Theil.

Aus der Formel des Artikels 109 folgt die Zahl der Durchschnittspunkte der beiden Curven elfter und fünfter Ordnung.

Dieselbe ist $= 18$.

Die bewegliche Curve fünfter Ordnung $P'_5$ entspricht derjenigen Geraden $P$ des $y$-Raumes, in welcher sich die zwei Ebenen schneiden, die zwei Flächen des Systems $\Sigma u_i \varphi_i = 0$ entsprechen, und zwar entspricht jedem Punkte auf $P$ ein Punktepaar auf $P'_5$.

Je drei Flächen des Systems $\Sigma u_i \varphi_i = 0$ schneiden sich ausser der festen Curve elfter Ordnung noch in zwei veränderlichen Punkten, denn die den beweglichen Theil des Schnittes zweier von diesen Flächen darstellende Curve $P'_5$ kann die dritte ausser der Curve elfter Ordnung nur mehr in $4.5 - 18 = 2$ Punkten treffen. Man ersieht daraus, dass die Curve elfter Ordnung das Aequivalent für die 62 Schnittpunkte der Flächen des Systems ist, welche nach der Natur der Transformation fest sein müssen, und dass also weitere feste Punkte nicht mehr existiren können.

Während nun im Allgemeinen jedem Punkte des $x$- (einfachen) Raumes nur ein Punkt des $y$- (Doppel-) Raumes entspricht, entspricht jedem Punkte der festen Curve elfter Ordnung nach der allgemeinen Theorie eine Gerade. Diese Geraden erfüllen eine Fläche, welche von einer beliebigen Geraden $P$ des $y$-Raumes in soviel Punkten getroffen wird, als die der Geraden entsprechende Curve $P'_5$ des $x$-Raumes die Curve elfter Ordnung trifft, nämlich in 18 Punkten. Die betreffende Fläche ist also von der 18. Ordnung.

## § 4.

### Ueber die den Ebenen des einfachen ($x$-) Raumes entsprechenden Flächen fünfter Ordnung des $y$- (Doppel-) Raumes.

Wir wollen nunmehr diejenigen Flächen des $y$-Raumes aufsuchen, welche den Ebenen des $x$-Raumes entsprechen.

Dieselben ergeben sich durch Elimination der $x_i$ aus den Gleichungen II) in § 2 und der Ebenengleichung

$$\Sigma u_i x_i = 0$$

und zwar in folgender Form:

$$F(u, u) \equiv \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & u_1 & A_1 & B_1 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & u_2 & A_2 & B_2 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & u_3 & A_3 & B_3 \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & u_4 & A_4 & B_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 & 0 & 0 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & 0 & 0 & 0 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Hierbei sind $C_{ik} = C_{ki}$, $A_i$ und $B_i$ linear in $y_i$.

Die durch diese Gleichung dargestellte Fläche ist daher von der fünften Ordnung, was auch mit der Thatsache übereinstimmt, dass den Geraden des $y$-Raumes Curven fünfter Ordnung im $x$-Raume entsprechen.

Die Betrachtung der durch die Matrix

$$\begin{Vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{Vmatrix}$$

dargestellten Determinanten ergiebt nun, dass dieselben für die Coordinaten $y$ einer und derselben Curve dritter Ordnung sämmtlich verschwinden.

Diese Curve dritter Ordnung muss also für die Fläche fünfter Ordnung $F(u, u) = 0$ Doppelcurve sein, wie man aus der Form von $F(u, u) = 0$ ersieht.

Ferner werden die Determinanten des Systems

$$\begin{Vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{Vmatrix}$$

durch die Coordinaten $(y)$ von vier Punkten $e_1$, $e_2$, $e_3$, $e_4$ sämmtlich zum Verschwinden gebracht.

Diese vier Punkte müssen daher ebenfalls als Doppelpunkte auf $F(u, u) = 0$ liegen und zwar bleiben sie fest für alle Flächen des dreifach unendlichen Systems $F(u, u) = 0$, während die Doppelcurve dritter Ordnung sich mit den $u_i$ ändert.

Man sieht, dass auch die sämmtlichen Doppelcurven dritter Ordnung durch die vier festen Doppelpunkte gehen müssen.

Doch sind es diese vier Punkte nicht allein, welche die Allgemeinheit der Lage der Doppelcurven beschränken. In welcher Weise eine solche Beschränkung noch weiterhin stattfindet, werden wir später sehen. (S. § 11.)

## § 5.

### Ueber die Uebergangsfläche $\Omega = 0$ des $y$- (Doppel-) Raumes und ihre Lage zu den Flächen $F(u, u) = 0$.

Bezeichnet man, wie im vorigen Paragraphen, die der Ebene $\Sigma u_i x_i = 0$ entsprechende Fläche fünfter Ordnung im $y$-Raume mit $F(u, u) = 0$ und in gleicher Weise die der Ebene $\Sigma v_i x_i = 0$ entsprechende Fläche mit $F(v, v) = 0$, so lässt sich das Product $F(u, u) . F(v, v)$ in folgender Form schreiben:

III) $$F(u, u) . F(v, v) \equiv F(u, v)^2 - (ABuv)^2 \Omega.$$

Hier ist:

$$F(u, v) \equiv \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & A_1 & B_1 & u_1 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & A_2 & B_2 & u_2 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & A_3 & B_3 & u_3 \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & A_4 & B_4 & u_4 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & 0 & 0 & 0 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & 0 & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$(ABuv) \equiv \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & u_1 & v_1 \\ A_2 & B_2 & u_2 & v_2 \\ A_3 & B_3 & u_3 & v_3 \\ A_4 & B_4 & u_4 & v_4 \end{vmatrix},$$

$$\Omega \equiv \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & A_1 & B_1 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & A_2 & B_2 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & A_3 & B_3 \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & A_4 & B_4 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & 0 & 0 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

Um zu diesem Resultat zu gelangen, wendet man den Determinantensatz von Hesse auf die unterstrichenen Glieder der nachfolgenden Determinante an:

$$\begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & A_1 & B_1 & u_1 & v_1 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & A_2 & B_2 & u_2 & v_2 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & A_3 & B_3 & u_3 & v_3 \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & A_4 & B_4 & u_4 & v_4 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 & 0 & \underline{0} & \underline{0} \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & 0 & 0 & \underline{0} & \underline{0} \end{vmatrix}.$$

$F(u, v) = 0$ stellt eine Fläche fünfter Ordnung im $y$-Raume dar, welche die Doppelcurve von $F(u, u) = 0$ und auch diejenige von $F(v, v) = 0$, aber beide einfach enthält.

Ebenso enthält $F(u, v) = 0$ die vier Punkte $e_1$, $e_2$, $e_3$, $e_4$ doppelt.

$(ABuv) = 0$ stellt eine Fläche zweiter Ordnung im $y$-Raume dar, welche die erwähnten Doppelcurven ebenfalls einfach und auch die vier Punkte $e_1$, $e_2$, $e_3$, $e_4$ einfach enthält.

$\Omega = 0$ ist die Gleichung einer Fläche sechster Ordnung, welche die Doppelcurven nicht, die vier Punkte $e_1$, $e_2$, $e_3$, $e_4$ dagegen doppelt enthält. Sie ist von $u$ unabhängig.

Die Identität III) sagt uns nun, dass die Fläche $F(u, u) = 0$ sowohl, als auch $F(v, v) = 0$ die Fläche $\Omega = 0$ in je einer Curve 15. Ordnung berühren, welch' letztere Curven den Schnitt von $F(u, v) = 0$ und $\Omega = 0$ ausmachen müssen.

Ebenso können wir uns aus dieser Identität wiederum überzeugen, dass sowohl die von den $u_i$ abhängige Curve dritter Ordnung für $F(u, u) = 0$, als auch die von den $v_i$ abhängige Curve dritter Ordnung Doppelcurve für $F(v, v) = 0$ sein muss.

Aus der Identität III) folgt ferner, dass die Gleichung der Fläche $F(u, u) = 0$ bis auf einen von den $u_i$ unabhängigen Factor $F(v, v)$ in der Form

$$F(u, v)^2 - (ABuv)^2 \Omega = 0$$

geschrieben werden kann, oder auch in der Form

$$(F(u, v) + (ABuv)\sqrt{\Omega})\,(F(u, v) - (ABuv)\sqrt{\Omega}) = 0.$$

Da aber sowohl $F(u, v)$, als auch $(ABuv)$ linear von den $u_i$ abhängig sind, so kann diese Gleichung auch, wie folgt, geschrieben werden:

$$[\Sigma u_i (M_i + N_i \sqrt{\Omega})] \,.\, [\Sigma u_i (M_i - N_i \sqrt{\Omega})] = 0,$$

wo die $M_i$ und $N_i$ von den $u_i$ unabhängig sind, und zwar

$$M_i = \frac{\partial F(u, v)}{\partial u_i} \text{ und } N_i = \frac{\partial (ABuv)}{\partial u_i}.$$

Da die eben geschriebene Gleichung der Gleichung $\Sigma u_i x_i = 0$ für beliebige $u_i$ entsprechen muss, so muss man $\Sigma u_i x_i$ einem der beiden Factoren proportional setzen; wir setzen nun

a) $$\varrho x_i = M_i + N_i \sqrt{\Omega}.$$

Dann entspricht einem Punkte $x$, für welchen $\Sigma u_i x_i = 0$ ist, ein Punkt $y$ von $F(u, u) = 0$, und zwar wird dafür $\sqrt{\Omega} = -\dfrac{\Sigma u_i M_i}{\Sigma u_i N_i}$, also eine rationale Function der $y$, d. h. man hat längs $F(u, u) = 0$ ein ganz bestimmtes Blatt, welches $\Sigma u_i x_i$ eindeutig entspricht. Ein zweites, von dem ersten völlig getrenntes Blatt erhält man dadurch, dass man längs $F(u, u) = 0$ $\sqrt{\Omega}$ den entgegengesetzten rationalen Werth giebt. Die zugehörige Fläche des $x$-Raumes würde man erhalten durch $\varrho x_i = M_i + N_i \cdot \dfrac{\Sigma u_i M_i}{\Sigma u_i N_i}$; von dieser Fläche wird später gehandelt werden.

Man kann also sagen, dass der ganze $y$-Raum doppelt überdeckt ist und dass sich die beiden Blätter durch das Vorzeichen von $\sqrt{\Omega}$ unterscheiden.

Geht man von einem Punkte $y$ aus und setzt die beiden Werthe von $\sqrt{\Omega}$ ein, so erhält man aus den Gleichungen a) zwei zugehörige Werthe von $x$, d. h. ein Punktepaar des $x$-Raumes.

Für diejenigen Punkte $y_i$, für welche $\Omega = 0$ ist, fallen die beiden Werthe von $x_i$ zusammen und $\Omega = 0$ ist somit die Uebergangsfläche des Doppelraumes.

## § 6.

### Ueber die den Geraden des $x$- (einfachen) Raumes entsprechenden Curven vierter Ordnung des $y$-Raumes.

Daraus, dass den Ebenen des $y$-Raumes Flächen vierter Ordnung im $x$-Raume entsprechen (§ 3), kann man schon schliessen, dass den Geraden des $x$-Raumes Curven vierter Ordnung im $y$-Raume entsprechen werden. Um diese näher zu bestimmen, verfährt man auf folgende Weise:

Die Gerade des $x$-Raumes sei gegeben durch

$$\Sigma u_i x_i = 0 \text{ und } \Sigma u'_i x_i = 0.$$

Ihre entsprechende Curve muss daher sowohl auf

$$F(u, v) - (ABuv)\sqrt{\Omega} = 0,$$

als auch auf

$$F(u', v) - (ABu'v)\sqrt{\Omega} = 0$$

liegen und somit auf

$$F(u, v).(ABu', v) - F(u'v).(ABuv) = 0.$$

Die letztere Gleichung lässt sich aber wieder auf die Form bringen:

$$(ABuu').F(v, v) = 0$$

und zwar durch Anwendung des Hesse'schen Determinantensatzes auf die unterstrichenen Glieder der folgenden Determinante:

$$\begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & A_1 & B_1 & u_1 & u'_1 & v_1 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & A_2 & B_2 & u_2 & u'_2 & v_2 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & A_3 & B_3 & u_3 & u'_3 & v_3 \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & A_4 & B_4 & u_4 & u'_4 & v_4 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v'_1 & v'_2 & v'_3 & v'_4 & 0 & 0 & \underline{0} & \underline{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{0} & \underline{0} & 1 \end{vmatrix}.$$

Da nun $F(v, v) = 0$ von den $u_i$ und $u'_i$ vollkommen unabhängig ist, so muss die der Geraden $(uu')$ entsprechende Curve auf $(ABuu') = 0$ liegen, d. h. auf einer Fläche zweiter Ordnung, deren Gleichung von der obigen Form $(ABuv) = 0$ ist und welche somit mit $F(u, u) = 0$ und $F(u', u') = 0$ die Doppelcurven dritter Ordnung gemeinsam hat. Sie hat daher mit $F(u, u) = 0$ noch eine Curve vierter Ordnung gemein, welche auch auf $F(u', u') = 0$ liegen und der Geraden $(uu')$ Punkt für Punkt entsprechen muss.*

Mit Zuhilfenahme einer bekannten Formel (Salmon, l. c. Art. 118) findet man, dass unsere Curve vierter Ordnung — wir wollen sie $P_4$ nennen — mit der Doppelcurve dritter Ordnung der Fläche $F(u, u) = 0$ sieben Punkte gemein hat.

Hieraus lässt sich wiederum folgern, dass $P_4$ in keiner andern Fläche zweiter Ordnung mehr liegen kann, da dieselbe sonst auch die Doppelcurve dritter Ordnung enthalten müsste, also mit $(ABuu') = 0$ eine Curve siebenter Ordnung gemein haben müsste, was nicht möglich ist. Die Curve $P_4$ ist daher von der zweiten Art.

Sie berührt die Fläche $\Omega = 0$ in zwölf Punkten. Diese zwölf Punkte sind zugleich Berührungspunkte von $F(u, u) = 0$ mit $F(u', u') = 0$.

---

* $(ABuu')$ ist nur von den Coordinaten der Geraden $(uu')$ abhängig, also der Geraden zugeordnet.

Ausser der Curve $P_4$ schneiden sich zwei Flächen fünfter Ordnung $F(u, u) = 0$ und $F(u', u') = 0$ noch in einer Curve 21. Ordnung. Dieselbe entspricht denjenigen Punktepaaren im $x$-Raume, von denen der eine Punkt auf der Ebene $(u)$, der andere conjugirte auf der Ebene $(u')$ liegt.

In jeder Ebene bilden diese Punkte eine Curve von der 19. Ordnung, wie wir später sehen werden. (§ 8.)

Diese Curve 21. Ordnung schneidet die Curve $P_4$ erstens in den $2.7 = 14$ Punkten, in welchen $P_4$ von den beiden Doppelcurven von $F(u, u) = 0$ und $F(u', u') = 0$ (welche Punkte natürlich nicht zusammenfallen können) getroffen wird, zweitens in den zwölf Punkten, in denen $\Omega = 0$ von $P_4$ getroffen, resp. berührt wird. Das giebt im Ganzen 26 Schnittpunkte — ein Resultat, das sich durch Anwendung einer bekannten Formel über die Durchschnittspunkte zweier Curven, welche den vollständigen Schnitt zweier Flächen ausmachen, verificiren lässt. (Salmon, l. c. Art. 109.)

## § 7.

### Ueber die Doppelfläche $\Omega'$ des einfachen ($x$-) Raumes.

Der Uebergangsfläche $\Omega$ des $y$-Raumes entspricht im $x$-Raume eine Fläche zwölfter Ordnung $\Omega'$ eindeutig. Die Gerade $P'$ des $x$-Raumes trifft nämlich $\Omega'$ in soviel Punkten, als die der Geraden entsprechende Curve vierter Ordnung $P_4$ die Fläche $\Omega$ trifft, also in zwölf Punkten.

Eigentlich sollte einer Fläche sechster Ordnung des $y$-Raumes $\Omega$ eine Fläche 24. Ordnung entsprechen; da jedoch immer zwei der entsprechenden Punkte zusammenfallen, so ist die Fläche eine doppelt zu zählende Fläche zwölfter Ordnung. (S. auch § 9, Ende.)

Diese Fläche $\Omega'$ ist die Jacobiana der Flächen vierter Ordnung, welche den Ebenen des $y$-Raumes entsprechen, und wird Doppelfläche genannt. Sie geht dreimal durch die Hauptcurve elfter Ordnung des $x$-Raumes. Jede Ebene $(u)$ des $x$-Raumes schneidet $\Omega'$ längs einer Curve zwölfter Ordnung, welcher im $y$-Raume die Berührungscurve 15. Ordnung zwischen $\Omega = 0$ und $F(u, u) = 0$ entspricht.

Da jeder Punkt der Hauptcurve elfter Ordnung für $\Omega'$ dreifach ist, so folgt daraus, dass die dem Punkte entsprechende Gerade des $y$-Raumes mit $\Omega$ nur drei Punkte gemeinsam haben kann, also $\Omega$ in diesen drei Punkten berühren muss. Somit wird $\Omega$ auch von der Fläche 18. Ordnung berührt, welche diese Geraden enthält.

Die den Geraden des $y$-Raumes entsprechenden Curven fünfter Ordnung treffen $\Omega'$ ausser der Hauptcurve noch in je sechs Punkten, welche den sechs Punkten entsprechen, in denen $\Omega$ von der entsprechenden Geraden getroffen wird. Die den Ebenen des $y$-Raumes entsprechenden Flächen vierter Ordnung schneiden $\Omega'$ noch in einer Curve 15. Ordnung u. s. w.

## § 8.

### Ueber die involutorische Transformation im einfachen ($x$-) Raume.

Da jedem Punkte des $y$-Raumes zwei Punkte des $x$-Raumes entsprechen, so kann man sagen: Die Punkte $x$ entsprechen sich involutorisch, d. h. jedem Punkte $x$ entspricht ein zweiter Punkt $x'$ und diesem wieder der erste.

Einer Ebene $\Sigma u_i x_i = 0$ des $x$-Raumes entspricht im $y$-Raume eine Fläche fünfter Ordnung; dieser muss nun im $x$-Raume wieder eine Fläche 20. Ordnung entsprechen, welche jedoch in die Ebene $\Sigma u_i x_i = 0$ und eine Fläche 19. Ordnung zerfällt.

Diejenigen Punkte also, welche den Punkten einer Ebene $(u)$ des $x$-Raumes involutorisch entsprechen oder ihnen conjugirt sind, erfüllen eine Fläche 19. Ordnung $F_{19}^{'(u)}$. Dieselbe geht fünfmal durch die Hauptcurve elfter Ordnung und auch durch die Curve zwölfter Ordnung, in welcher $\Omega'$ von der Ebene $(u)$ geschnitten wird. Die Fläche $F_{19}^{'(u)}$ schneidet daher die Ebene $u$ noch in einer Curve siebenter Ordnung, welche die elf Schnittpunkte der Ebene $(u)$ mit der Hauptcurve elfter Ordnung als Doppelpunkte enthält und von den conjugirten Punktepaaren gebildet wird, welche in der Ebene $(u)$ liegen. Diese Curve siebenter Ordnung entspricht der Doppelcurve von $F(u, u) = 0$ und ist vom Geschlechte 4.

Aus dem Obigen folgt unmittelbar, dass den Punkten einer Geraden $P$ des $x$-Raumes die Punkte einer Raumcurve 19. Ordnung $P'_{19}$ involutorisch entsprechen. Dieselbe hat mit der Geraden $P'$ die zwölf Punkte gemein, in denen $\Omega'$ von $P'$ getroffen wird.

Suchen wir nunmehr diejenigen Punkte einer Ebene $(u)$, welche ihre involutorisch entsprechenden auf einer andern Ebene $(u')$ haben, so findet man, dass diese Punkte von der Ebene $(u)$ aus der Fläche $F_{19}^{'(u')}$ ausgeschnitten werden, ebenso, wie ihre entsprechenden Punkte in $(u')$ von einer Fläche $F_{19}^{'(u')}$. Die gesuchten Punkte bilden daher eine Curve 19. Ordnung, ebenso ihre entsprechenden in $(u')$.

Diese beiden Curven haben die zwölf Punkte gemeinsam, in denen die Schnittlinie ihrer Ebenen $\Omega'$ schneidet. Jede derselben hat ferner die elf Punkte zu fünffachen Punkten, die von der Hauptcurve elfter Ordnung in $(u)$ und bez. $(u')$ ausgeschnitten werden. Beiden Curven entspricht im $y$-Raume die Curve 21. Ordnung, welche $F(u, u) = 0$ und $F(u', u') = 0$ ausser $P_4$ noch gemeinsam haben. (S. § 6.)

Suchen wir ferner diejenigen Punkte einer Ebene $(u)$, deren involutorisch entsprechende in einer gegebenen Geraden $P'$ liegen, so finden wir, dass es 19 solcher Punkte giebt. Dieselben werden auf $(u)$ von der der Geraden $P'$ involutorisch entsprechenden Curve $P'_{19}$ ausgeschnitten, ebenso ihre entsprechenden auf $P'$ von der Fläche $F_{19}^{'(u)}$.

Diese 2.19 Punkte entsprechen mit Hinzurechnung des Schnittpunktes von $(u')$ und $P'$ und seines conjugirten den 20 Schnittpunkten der Curve $P_4$ im $y$-Raume (welche $P'$ entspricht) mit $F(u, u) = 0$.

Nehmen wir nunmehr drei Ebenen im $x$-Raume $(u)$, $(u')$, $(u'')$ und bezeichnen ihre resp. Schnitte mit $(uu')$, $(u'u'')$, $(uu'')$, so giebt es auf der Geraden $(uu')$ 19 Punkte, deren involutorisch entsprechende auf $u''$ liegen, ebenso auf $(uu'')$ 19 Punkte, deren involutorisch entsprechende auf $u'$ liegen, und schliesslich gilt dasselbe von $(u'u'')$ und $u$. (S. Riccardo de Paolis, Le trasf. doppie dello spazio, R. Acc. dei Lincei 1885, S. 14.)

Einem jeden dieser sich im $x$-Raume involutorisch entsprechenden Punktepaare entspricht nun im $y$-Raume ein und nur ein Punkt $y$, welcher daher den drei Flächen des $y$-Raumes $F(u, u) = 0$, $F(u', u') = 0$ und $F(u'', u'') = 0$ gemeinsam sein muss.

Das ergiebt 57 gemeinsame Punkte der erwähnten Flächen.

## § 9.

### Ueber weitere Hauptpunkte im $y$- (Doppel-) Raume.

Die eben abgeleiteten Beziehungen setzen uns in den Stand, die Hauptelemente des $y$-Raumes des Weiteren festzulegen.

Wir haben bereits gefunden (§ 4), dass die sämmtlichen den Ebenen des $x$-Raumes entsprechenden Flächen fünfter Ordnung vier Doppelpunkte $e_1$, $e_2$, $e_3$, $e_4$ gemeinsam haben.

Für jeden dieser vier Punkte wird aber die erste der Gleichungen II) identisch mit der zweiten bis auf einen constanten Factor. Die dem Punkte $e_1$ z. B. entsprechenden Punkte des $x$-Raumes liegen daher auf dem durch die zweite und dritte Gleichung von II) bestimmten Kegelschnitte $E'_1$. Ebenso entsprechen dem Punkte $e_2$ die Punkte vom Kegelschnitte $E'_2$, $e_3$ die von $E'_3$ und $e_4$ die von $E'_4$.

Jeder von diesen Kegelschnitten geht achtmal durch die Hauptcurve elfter Ordnung — da ihm sonst kein Punkt entsprechen könnte — und liegt doppelt auf den sämmtlichen Flächen 19. Ordnung $F'_{19}$ und einfach auf $\Omega'$.

Drei Flächen fünfter Ordnung haben im Ganzen 125 Schnittpunkte. 32 derselben werden durch die Doppelpunkte, 57 nach § 8 absorbirt, während ein Punkt dem Schnittpunkte der drei entsprechenden Ebenen des $x$-Raumes entspricht.

Die drei Flächen müssen also ausserdem noch 35 Punkte gemeinsam haben, welche allen Flächen fünfter Ordnung $F(u, u) = 0$ einfach angehören. Diesen 35 Punkten müssen sodann im $x$-Raume die sämmtlichen Punkte je einer Geraden entsprechen, und zwar müssen diese Geraden vierpunktige Sehnen der Hauptcurve elfter Ordnung sein, da ihnen sonst im $y$-Raume keine Punkte entsprechen könnten.

Dieses letztere Resultat lässt sich verificiren mit Zuhilfenahme einer Formel von Zeuthen (Annali di mat. S. II—III, S. 189), nach welcher unsere Hauptcurve elfter Ordnung 35 vierpunktige Sehnen haben muss.

Diese 35 Geraden liegen einfach auf den Flächen $F'_{19}$ und $\Omega'$.

Dass diese 35 Geraden auch auf $\Omega'$ liegen, folgt daraus, dass auch die entsprechenden 35 Hauptpunkte des $y$-Raumes auf $\Omega$ liegen, was wir sofort darthun werden.

Die 35 Punkte liegen auf sämmtlichen Flächen $F(u, u) = 0$ ohne Rücksicht auf die Werthe von $u$. Daher liegen sie auch auf den Flächen

$$\frac{\partial F}{\partial u_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial u_2} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial u_3} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial u_4} = 0$$

und somit auch auf

$$v_1 \frac{\partial F}{\partial u_1} + v_1 \frac{\partial F}{\partial u_2} + v_2 \frac{\partial F}{\partial u_3} + v_4 \frac{\partial F}{\partial u_4} = 0$$

oder auf

$$F(u, v) = 0.$$

Da diese Punkte nun auch auf $F(u, v) = 0$ liegen, so müssen sie nach der Identität III) auf $\Omega = 0$ doppelt liegen.

Jede Ebene $(u)$ des $x$-Raumes wird von ihrer involutorisch entsprechenden $F'^{(u)}_{19}$ längs einer Curve zwölfter und siebenter Ordnung geschnitten. Diese beiden Curven treffen sich ausser in den elf Schnittpunkten mit der Hauptcurve elfter Ordnung und den acht Schnittpunkten mit $E'_1$, $E'_2$, $E'_3$, $E'_4$ (in den ersteren je sechs- und in den letzteren je einmal) noch in zehn Punkten. Diese entsprechen den zehn Schnittpunkten der Doppelcurve von $F(u, u) = 0$ mit $\Omega = 0$ ausser $e_1$, $e_2$, $e_3$, $e_4$ und sind für $F(u, u) = 0$ Cuspidalpunkte.

Noch ist zu erwähnen, dass die vier Punkte $e_1$, $e_2$, $e_3$, $e_4$ für die der Hauptcurve elfter Ordnung des $x$-Raumes entsprechende Fläche 18. Ordnung achtfach sein müssen, während die übrigen 35 festen Punkte des $y$-Raumes für dieselbe Fläche vierfach sind.

Bezüglich der Geometrie auf den Flächen fünfter Ordnung mit Doppelcurve dritter Ordnung vergleiche man Clebsch (Ueber die Abbildung algebraischer Flächen, Mathem. Annalen, Bd. I S. 284).

Anmerkung. Dass $E'_1$, ... für $F'^{(u)}_{19}$ doppelt ist, ergiebt sich daraus, dass jede Ebene $(u)$ die Kegelschnitte $E'_1$, ... in je zwei Punkten schneidet, während jede der 35 Geraden von $(u)$ nur in einem Punkte getroffen wird.

Dass die $E'_1$, ... und die 35 Geraden für $\Omega'$ nur einfach sind, ergiebt sich am einfachsten aus der Bemerkung, dass $\Omega'$ selbst doppelt zu zählen ist.

## § 10.

### Ueber die Hauptelemente der involutorischen Transformation im einfachen ($x$-) Raume.

Wir wissen bereits, dass die einer Ebene $(u)$ involutorisch entsprechende Fläche $F'^{(u)}_{19}$ die Hauptcurve elfter Ordnung fünfmal, die vier Kegelschnitte $E'_1, E'_2, E'_3, E'_4$ doppelt und die 35 vierfachen Sehnen der Hauptcurve elfter Ordnung einfach enthält. Zwei Flächen $F'^{(u)}_{19}$ und $F'^{(u')}_{19}$ schneiden sich daher in einer variablen Curve 19. Ordnung $P'_{19}$, welche der Geraden $(uu')$ entspricht. Dieselbe trifft die Hauptcurve elfter Ordnung 72 mal, eine weitere Fläche $F'^{(u'')}_{19}$ also noch in einem variablen Punkte, wie es auch sein muss.

Unsere involutorische Transformation hat daher folgende Hauptelemente:

1. die Hauptcurve elfter Ordnung, durch welche $F'^{(u)}_{19}$ fünfmal und $P'_{19}$ 72mal geht;
2. die vier Kegelschnitte $E'_1, E'_2, E'_3, E'_4$, durch welche $F'^{(u)}_{19}$ je zweimal und $P'_{19}$ gar nicht geht;
3. die 35 vierpunktigen Sehnen, durch welche $F'^{(u)}_{19}$ je einmal und $P'_{19}$ gar nicht geht.

Jedem Punkte $p'$ der Hauptcurve elfter Ordnung entspricht eine Curve fünfter Ordnung, welche die Hauptcurve elfter Ordnung 19mal und zwar dreimal in $p'$ trifft. Diese Curven erfüllen eine Fläche 72. Ordnung. Dieselbe geht 18mal durch die Hauptcurven elfter Ordnung, je achtmal durch $E'_1, E'_2, E'_3, E'_4$ und je viermal durch die 35 vierfachen Sehnen der Hauptcurve elfter Ordnung.

Einem Punkte $e'$ von $E'_1, E'_2, \ldots$ entspricht wieder resp. $E'_1, E'_2, E'_3, E'_4$. Einem Punkte der 35 vierpunktigen Sehnen entspricht wieder seine zugehörige vierpunktige Sehne.

## § 11.

### Ueber den durch die involutorische Transformation des $x$-Raumes bestimmten Strahlencomplex.

Jedem Punkte des $y$-Raumes entsprechen zwei Punkte des $x$-Raumes. Die Verbindungslinien dieser zwei Punkte bilden je einen Strahl des Complexes, dessen einzelne Strahlen den Punkten des $y$-Raumes entsprechen. Derselbe ist bestimmt durch die beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma A_i x_i &= 0 \\ \Sigma B_i x_i &= 0 \end{aligned}\right\}, \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

wo $A_i$ und $B_i$ die bekannten in § 2 definirten Functionen sind.

Vermöge dieser beiden Gleichungen sind die Ebenen des $x$-Raumes collinear auf sich selbst bezogen, denn für jeden Werth von $y_1, y_2, y_3, y_4$ erhalten wir zwei Ebenen im $x$-Raume, die einander somit collinear zu-

geordnet sind, da auch die $y$ in die Gleichungen linear eingehen. Die Schnitte solcher zwei Ebenen bilden den Reye'schen Tetraedercomplex. (Reye, Geometrie der Lage, II. Theil, 2. Aufl., S. 135 flgg.)

Wenn ich hier auf einem andern Wege die Haupteigenschaften desselben nochmals ableite, so geschieht es wegen der engen Beziehungen, in denen die hierbei auftretenden Elemente zu unserer Transformation stehen.

Die Coordinaten der einzelnen Geraden des Complexes sind

$$\pi_{ik} = \varrho \cdot \begin{vmatrix} A_i & B_i \\ A_k & B_k \end{vmatrix}.$$

Ehe wir diesen Complex weiter betrachten, erinnern wir uns zunächst, dass, wie wir in § 6 gesehen, einer jeden Geraden $(uu')$ des $x$-Raumes eine Fläche zweiter Ordnung

$$(ABuu') = 0$$

zugeordnet ist. Wir fragen nun: Welcher Art wird die Fläche, die einer Complexgeraden zugeordnet ist? Nehmen wir zu diesem Zwecke irgend einen Punkt $y'$ des $y$-Raumes, so ist die ihm zugehörige Complexgerade bestimmt durch

$$\Sigma A'_i x_i = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma B'_i x_i = 0,$$

wo in $A_i$ und $B_i$ statt $y_i$ $y'_i$ gesetzt wurde.

Die Gleichung der dieser Geraden entsprechenden Fläche wird daher:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & A'_1 & B'_1 \\ A_2 & B_2 & A'_2 & B'_2 \\ A_3 & B_3 & A'_3 & B'_3 \\ A_4 & B_4 & A'_4 & B'_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Es ist das offenbar die Gleichung eines Kegels mit der Spitze in $y'_1$, $y'_2$, $y'_3$, $y'_4$. D. h.: Einer Geraden des Complexes ist ein Kegel zweiten Grades zugeordnet, der seine Spitze in dem der Geraden entsprechenden Punkte hat.

Nehmen wir nun im $x$-Raume irgend eine Ebene $(u)$ und in derselben einen Punkt $b'$ und fragen, wieviele Complexgerade in der Ebene $(u)$ liegen und durch den Punkt $b'$ hindurchgehen. Einer jeden Geraden des Strahlbüschels durch $b'$ in $(u)$ entspricht im $y$-Raume eine Fläche zweiter Ordnung, welche durch die Doppelcurve von $F(u, u) = 0$ und durch den $b'$ entsprechenden Punkt $b$ geht. Wird nun die Gerade durch $b'$ Complexgerade, so wird die Fläche zweiter Ordnung ein Kegel. Es fragt sich nun, wieviele Kegel zweiter Ordnung durch die Doppelcurve dritter Ordnung und $b$ hindurchgehen, so dass ihre Spitze auf der Doppelcurve liegt. Wir erhalten diese Kegel, wenn wir durch $b$ die Sehne an die Doppelcurve dritter Ordnung ziehen und von den beiden Schnittpunkten aus die Curve projiciren.

Es giebt daher zwei solcher Kegel, denen zwei Complexgerade durch $b$ entsprechen. Der Complex ist also von der zweiten Ordnung.

Anmerkung 1. Die Curve vierter Ordnung, welche einer Complexgeraden Punkt für Punkt entspricht, hat in dem die Complexgerade bestimmenden Punkte $y$ einen Doppelpunkt.

Anmerkung 2. Nunmehr erkennt man auch, dass durch zwei beliebig gewählte Punkte im Allgemeinen keine Doppelcurve dritter Ordnung einer $F(u, u) = 0$ des $y$-Raumes hindurchgehen wird, da die durch einen Punkt ausser $e_1$, $e_2$, $e_3$, $e_4$ gehenden Doppelcurven dritter Ordnung auf dem Kegel liegen müssen, der durch diesen Punkt, resp. seine entsprechende Complexgerade bestimmt ist. (S. § 4.)

Man erkennt sofort, dass den vier Hauptpunkten $e_1$, $e_2$, $e_3$, $e_4$ des $y$-Raumes, für deren Coordinaten $\Sigma A_i x_i = 0$ und $\Sigma B_i x_i = 0$ zusammenfallen, die sämmtlichen Geraden dieser Ebene $\Sigma A_i x_i = 0$ oder $\Sigma B_i x_i = 0$ entsprechen, dass also die sämmtlichen Geraden, welche in der Ebene je eines der Kegelschnitte $E'_1$, $E'_2$, $E'_3$ und $E'_4$ liegen, zum Complex gehören.